1. Впишите в каждый квадратик одну и ту же цифру, чтобы получилось верное равенство:
$\square+\square+\square+\square=\square\times\square$.

Ответ. 4+4+4+4=4×4 или 0+0+0+0=0×0.

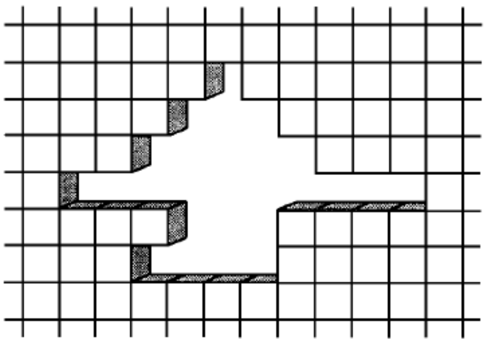
Комментарий (как можно догадаться без подбора): Сумма четырех одинаковых слагаемых – это 4 умножить на слагаемое, т.е. $\square+\square+\square+\square= 4\times\square$. Поэтому вместо квадратика нужно подставить 4.

Критерии проверки.

Достаточно привести верный пример, никаких объяснений не требуется. Наличие обоснований (верных и неверных) не уменьшает и не увеличивает количество баллов.

- Правильный ответ – **7 баллов**.
- Замечено, что один из множителей справа должен быть равен 4, но примера нет – **1 балл**. (например, у ребенка может быть записано $\square+\square+\square+\square= 4\times\square$)
- Неверный пример, в котором используется две цифры, при этом один из множителей справа равен 4 (например, 3+3+3+3=3×4) – **1 балл**.
- Другие неверные примеры (отличные от описанных выше) – **0 баллов**.

2. Сколько кирпичей не хватает в стене, изображённой на рисунке?



Ответ. 26.

Комментарий.

1. Удобнее всего просто перерисовать картинку на клетчатую бумагу и посчитать клеточки:

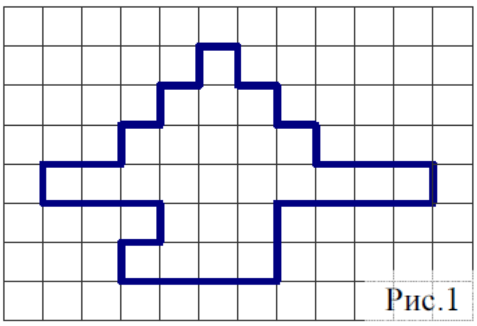


Рис.1

2. Если считать кирпичи на исходной картинке, то удобнее их считать не по горизонталям, а по вертикалям. Тогда получается (количество кирпичей в вертикалях слева направо) 1+1+3+5+6+5+2+1+1+1=26.

Критерии проверки:

- Для **7 баллов** достаточно верно указать количество кирпичей, как именно производился подсчет описывать не обязательно.

- Если ответ неправильный, а как он был найден – не описано – **0 баллов**.
- Если при подсчете в тетрадь выписана верная сумма (в сумме слагаемые дают 26) и ошибка не в подсчете клеток в фигуре или в какой-то части фигуры, а уже потом, при сложении чисел в данной сумме – **4-5 баллов.** Например, в работе написан подсчет кирпичей по горизонталям или вертикалям, т.е. есть верная сумма 1+1+3+5+6+5+2+1+1+1 или 1+3+5+10+3+4, но результат этой суммы вычислен неправильно. При этом **5 баллов** ставится, если ребенок объяснил, как именно он группирует клетки, чтобы получить нужную сумму. **4 балла** ставится, если из работы не совсем ясно, откуда берутся слагаемые в сумме.
- Если есть сумма (понятно, как ребенок группирует и считает клетки), однако он ошибается в некоторых слагаемых – **1 балл**.
- Если к работе приложено условие, в котором «дырка» верно разлинована на «клеточки», но подсчета нет или он неверный (при этом в тетрадь данная картинка не перерисовывалась) – **1 балл**.
- В тетради ученика верно перерисованы границы фигуры на клетчатую бумагу (т.е. в тетради есть рис.1), при этом ответ неверный – от **1 до 3 баллов** (3 балла, если данный ответ отличается от правильного на 1).
- В тетради ребенка есть попытка перерисовать границы фигуры на клетчатую бумагу, но перерисовано с небольшой ошибкой, для перерисованной фигуры подсчет произведён верно – **1-2 балла** (2 балла, если ошибка при перерисовке всего в 1 клеточку).

3. Жучка тяжелее кошки в 3 раза, мышка легче кошки в 10 раз, репка тяжелее мышки в 60 раз. Во сколько раз репка тяжелее Жучки? Ответ обоснуйте.

Ответ. В 2 раза.

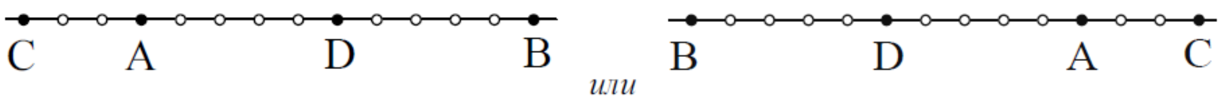
Решение. Кошка=10 мышек, репка = 60 мышек. Значит репка в 6 раз тяжелее кошки. Т.е. репка = 6 кошек. По условию Жучка = 3 кошки. Поэтому репка в 2 раза тяжелее Жучки.

Критерии проверки.

- Верное решение – **7 баллов**.
- Правильный ответ, пояснения частично присутствуют (какие-то из соотношений найдены), но полного обоснования нет – **3 балла**.
- Правильный ответ без пояснений, как он получен – **2 балла**.
- Есть частичные продвижения, например, найдено, что репка в 6 раз тяжелее кошки – **до 2 баллов.**

4. Отметьте на одной прямой четыре точки A, B, C, D так, чтобы расстояние между точками A и B было равно 10 см, между A и C – 3 см, между B и D – 5 см, а между D и C – 8 см.

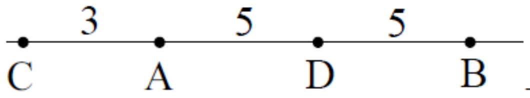
Ответ. см. рисунок.



Критерии проверки.

- Правильный пример на клетчатой бумаге (объяснений как он найден не требуется) – **7 баллов**.

- Правильный пример, в котором расстояния между точками в два раза меньше требуемого (т.е. расстояния измерялись не в сантиметрах, а в клеточках) – **6 баллов**.
- Пример, в котором на прямой точки отмечены в правильном порядке и числами указаны расстояния между соседними точками, т.е. ответ примерно в таком виде



– **6 баллов**.
- На прямой отмечены точки в правильном порядке (т.е. точки следуют в порядке C, A, D, B или B, D, A, C), но при этом расстояния межу соседними точками не указаны и где-то не соответствуют требуемому – **4 балла**.
- Отмеченные точки идут в неправильном порядке, только три из указанных в условии четырёх расстояний ему удовлетворяют – **1 балл**.
- Отмеченные точки идут в неправильном порядке, удовлетворяют условию два или меньше из данных четырёх расстояний – **0 баллов**.

5. Каждому из двух муравьёв, Толстому и Тонкому, нужно перенести по 150 г груза, из точки A (где они сейчас находятся) в точку B, расстояние между которыми равно 15 метров. Толстый муравей ходит со скоростью 3 м/мин, но может унести 5 г груза, Тонкий – со скоростью 5 м/мин, но может унести лишь 3 г груза. Кто из них быстрее доставит весь свой груз в точку B? Скорость муравья с грузом не отличается от скорости муравья без груза.

Ответ. Толстый справится на 2 мин раньше.

Решение. Чтобы донести груз, Толстому нужно сделать 30 рейсов из точки A в точку B и 29 обратных рейсов из точки B в точку A. На один рейс у него уходит 5 минут, а на весь путь уйдет $5\cdot(30+29)=295$ мин. Тонкому муравью нужно сделать 50 рейсов из точки A в точку B и 49 обратных рейсов из точки B в точку A. У него на один рейс уходит 3 минуты, а на весь путь уйдет $3\cdot(50+49)=297$ мин. Поэтому Толстый окончит свою работу раньше.

Комментарий. Возможен такой вариант решения. Если бы оба муравья находились в точке B, то они бы выполнили работу за одинаковое время: Толстому нужно было сделать 60 рейсов по 5 минут, а тонкому 100 рейсов по 3 минуты. Так как муравьи уже находятся в точке A, время Толстого уменьшается на 5 минут, а время Тонкого – на 3 минуты. Значит, Толстый окончит работу раньше.

Критерии проверки.

- Верное решение – **7 баллов**.
- Арифметическая ошибка при выполнении действий, но вся логика верна – **5-6 баллов.**
- Правильный точный ответ (Толстый окончит работу на 2 минуты раньше) без обоснования – **2 балла**.
- Ошибка при подсчете количества рейсов – считают, что количество рейсов туда и обратно должно быть одинаковым (т.е. считают, что нужно 30 рейсов «туда и обратно» для Толстого и 50 рейсов «туда и обратно» для Тонкого, соответственно получают $30\cdot10=300$ минут для Толстого и $50\cdot6=300$ минут для Тонкого), соответственно получен неверный ответ, что времени у муравьёв уйдет поровну – **1 балл**.
- Только правильный ответ (Толстый окончит работу раньше) – **0 баллов**.

6 класс

1. В примере на сложение: $\square + \triangle + \square = \square\square$ впишите одну и ту же цифру в каждый квадратик и другую цифру в треугольник так, чтобы пример получился верным.

   Ответ. 1+9+1=11.

   Комментарий (как можно было найти ответ): Справа стоит двузначное число из двух одинаковых цифр. Т.к. самая большая сумма трех цифр это 9+9+9=27, то число справа меньше 30, т.е. это 11 или 22. Если это 11, то получаем: $\boxed{1}+\triangle+\boxed{1}=\boxed{1}\boxed{1}$, откуда $\triangle = 9$. Если это 22, то $\boxed{2}+\triangle+\boxed{2}=\boxed{2}\boxed{2}$, но тогда $\triangle = 18$, что не подходит, т.к. это должна быть цифра. Т.е. ответ единственный.

Критерии проверки.

- Правильный пример (обоснований не требуется) – 7 **баллов**.
- Пример, в котором в треугольник вписывается двузначное число, а в квадратики вписаны одинаковые цифры, например, $\boxed{3}+\underset{27}{\triangle}+\boxed{3}=\boxed{3}\boxed{3}$ – **1 балл**.

2. На первой остановке в пустой автобус вошло 18 пассажиров. Потом на каждой остановке выходило 4 человека, а входило 6 человек. Сколько пассажиров ехало в автобусе между четвёртой и пятой остановками?

   Ответ. 24 человек.

   Решение.

   Способ 1.

   После каждой остановки, не считая первую, количество пассажиров в автобусе увеличивается на 2 человека. Значит, со второй по четвёртую остановку количество человек увеличилось на 6 человек. Т.е. стало 18+6=24 человек.

   Способ 2.

   Со второй по четвёртую остановку вышло $3\cdot4=12$ человек, а вошло $3\cdot6=18$ человек. Т.е. в автобусе стало 18-12+18=24 человека.

Критерии проверки.

- Верное решение – **7 баллов.**
- Неверный ответ, но верная часть решения. Например, найдено, что после каждой остановки число пассажиров увеличивается на 2 – **2-3 балла.**
- Только верный ответ – **1 балл.**

3. Три лисы: Алиса, Лариса и Инесса разговаривали на полянке. Лариса: «Алиса не самая хитрая». Алиса: «Я хитрее Ларисы». Инесса: «Алиса хитрее меня». Известно, что самая хитрая лиса солгала, остальные сказали правду.

   а) Может ли самой хитрой лисой быть Алиса? Почему?
   б) Какая лиса самая хитрая? Дайте ответ и объясните, почему другие варианты не подходят.

Ответ. а) Не может, б) Инесса.

Решение.

а) Алиса не может быть самой хитрой, т.к. если она сама хитрая, то она хитрее Ларисы, т.е. Алиса сказала правду. Но самая хитрая лиса должна была солгать.

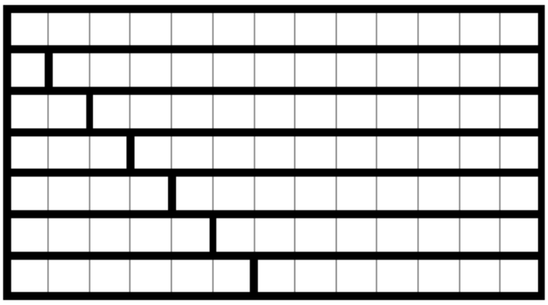
б) Самая хитрая лиса Инесса. Докажем это. Мы уже получили в пункте а), что Алиса не может быть самой хитрой лисой. Лариса тоже не может быть самой хитрой, т.к. она сказала правду про Алису, а самая хитрая лиса должна была солгать. Поэтому остался только один вариант: самая хитрая – Инесса.

Критерии проверки.

- Верное решение пункта а) – **3 балла,** пункта б) – **4 балла.**
- Только верные ответы на каждый из пунктов – **0 баллов.**

4. Как из 13 прямоугольников размерами 1×1, 2×1, 3×1, …, 13×1 составить прямоугольник, у которого все стороны больше 1?

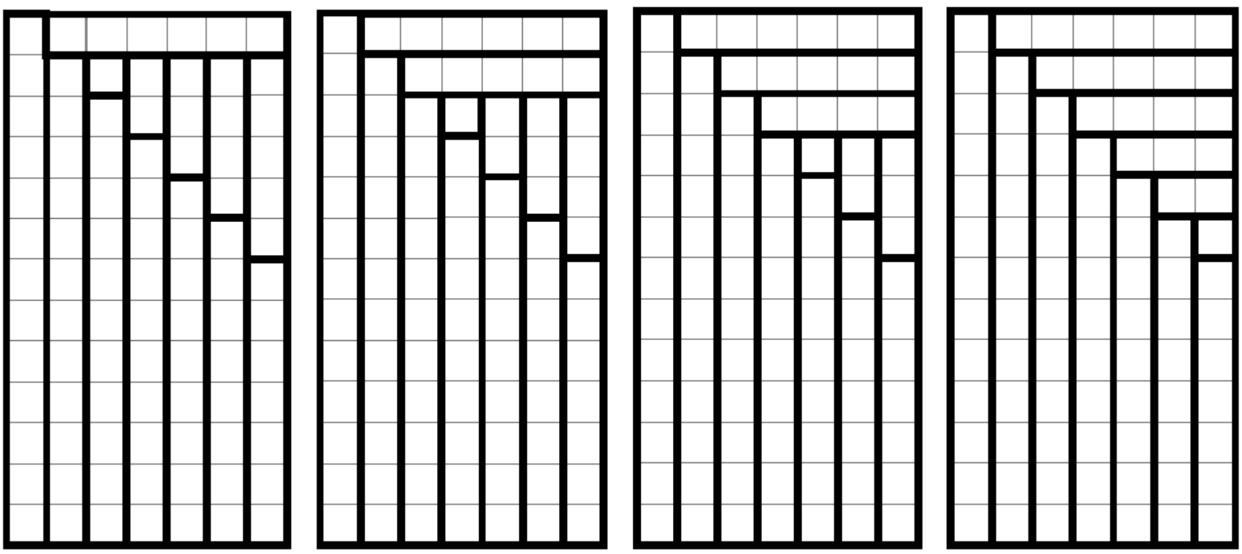
Ответ. Один из возможных примеров приведен на рисунке:



Комментарий 1 (как можно догадаться до примера). Если группировать прямоугольники: первый с последним, второй с предпоследним и т.д., то получаются одинаковые полоски длины 14: 1+13=14, 2+12=14, 3+11=14,… Из нескольких одинаковых полосок легко сложить прямоугольник, прикладывая их друг к другу длинной стороной. Однако, если мы попробуем продолжить описанный выше процесс, возникнет проблема: центральная полоска 7×1 останется без пары. Проблему можно решить так: самую длинную полоску длины 13 оставить одну, а оставшиеся сгруппировать по тому же принципу (самую короткую с самой длинной и т.д.): 13, 1+12, 2+11, 3+10, 4+9, 5+8, 6+7. Приложив получившиеся полоски длины 13 друг к другу, получаем пример, приведенный выше.

При решении использована та же идея, с помощью которой маленький Гаусс нашел сумму чисел от 1 до 100.

Комментарий 2. Площадь итогового прямоугольника равна 1+2+3+4+…+13=91. Т.к. в разложении 91 на простые множители всего два множителя: $91=7\cdot13$, то стороны итогового прямоугольника однозначно определяются – они должны быть 7 и 13. Прямоугольника других размеров (так, чтобы его стороны были больше 1) сложить из данных прямоугольничков нельзя. При этом внутри итогового прямоугольника исходные прямоугольнички могут размещаться по-разному. Некоторые варианты расположения приведены ниже:



Критерии проверки.

- Верный рисунок (никаких обоснований и рассуждений не требуется) – **7 баллов**.
- Полное описание того, как составить искомый прямоугольник (например, такое: из прямоугольников 1×1 и 12×1 составим прямоугольник 13×1. Такие же прямоугольники составим из 2×1 и 11×1, 3×1 и 10×1, … , 6×1 и 7×1. Затем из семи прямоугольников 13×1 сложим прямоугольник 13×7) – **7 баллов**.
- Идея разбиения полосок на «первая-последняя, вторая-предпоследняя», не доведенная до конца – **1-2 балла**.

5. Гравировщик делает таблички с буквами. Одинаковые буквы он гравирует за одинаковое время, разные — возможно, за разное. На две таблички «ДОМ МОДЫ» и «ВХОД» вместе он потратил 50 минут, а одну табличку «В ДЫМОХОД» сделал за 35 минут. За какое время он сделает табличку «ВЫХОД»?

Ответ. 20 минут.

Решение.

В табличках ДОМ МОДЫ ВХОД и В ДЫМОХОД отделим буквы, образующие слово ВЫХОД, тогда от первой таблички останется Д, О, М, М, О, Д, а от второй – Д, М, О. Заметим, что ДОМ МОДЫ ВХОД отличается от В ДЫМОХОД на буквы Д, О, М, а по времени – на 15 минут (50-35=15). Значит, на изготовление букв Д, О, М уходит 15 мин.

Теперь мы знаем, что при изготовлении В ДЫМОХОД, 15 минут ушло на изготовление букв Д, М, О, т.е. оставшиеся 35-15=20 минут понадобилось на изготовление букв В, Ы, Х, О, Д.

Критерии проверки.

- Верное решение – **7 баллов**.
- Найдено время, необходимое для гравировки букв Д, О, М – **2 балла**.
- Арифметическая ошибка при выполнении действий – минус **1 балл**.

7 класс

1. Расставьте скобки, чтобы равенство стало верным: $0{,}5+0{,}5:0{,}5+0{,}5:0{,}5=5$.

Ответ: $((0{,}5+0{,}5):0{,}5+0{,}5):0{,}5=5$.

Критерии проверки.

- Верный ответ – **7 баллов**.

2. Три медвежонка делили три кусочка сыра массой 10 г, 12 г и 15 г. Лиса стала им помогать. Она может от любых двух кусочков одновременно откусить и съесть по 1 г сыра. Сможет ли лиса оставить медвежатам равные кусочки сыра?

Ответ. Сможет.
Решение. Приведем один из возможных примеров того, как лиса могла это сделать. Для удобства запишем результаты «работы» лисы в таблицу.

10	12	15
9	12	14
8	12	13
7	12	12
7	11	11
7	10	10
7	9	9
7	8	8
7	7	7

Как можно догадаться до решения. Сначала попытаться уравнять только два куска сыра, а потом уже все три.

Критерии проверки.

- Верный алгоритм (неважно какой длины, записанный словами или таблицей) – **7 баллов**.
- Верный в целом алгоритм с пропущенными звеньями – **5 баллов**.
- Показано, как уравнять два куска, но дальше продвижений нет – **2 балла**.
- Только ответ «да» или «сможет» – **0 баллов**.

3. В подводном царстве живут осьминоги с семью и восемью ногами. Те, у кого 7 ног, всегда врут, а те, у кого 8 ног, всегда говорят правду. Однажды между тремя осьминогами состоялся такой разговор.

Зелёный осьминог: «У нас вместе 21 нога».
Синий осьминог (зелёному): «Всё ты врёшь!»
Красный осьминог: «Да оба вы врёте!»

1) Мог ли зеленый осьминог сказать правду? Почему?
2) Сколько ног было у каждого осьминога? (Ответ обоснуйте.)

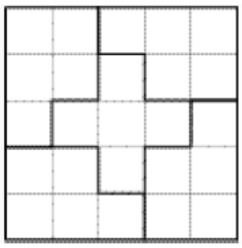
Ответ. 1) Не мог.
2) У зеленого осьминога 7 ног, у синего – 8 ног, у красного – 7 ног.
Решение.
1) Если бы зелёный осьминог сказал правду, то у каждого осьминога было бы по 7 ног. Значит, сам зелёный осьминог согласно условию должен был солгать. Получаем противоречие, следовательно, зелёный осьминог солгал.
2) Так как зелёный осьминог солгал, то у него 7 ног. Синий осьминог сказал про зелёного правду, значит, у него 8 ног. Красный осьминог солгал, так как перед ним солгали не оба, а только один, значит, у красного 7 ног.

Критерии проверки.

- Верное решение обоих пунктов – **7 баллов**.
- Верное решение первого пункта + часть решения второго – **4-5 баллов**.
- Верное решение первого пункта – **3 балла**.
- Частично верные, но неполные рассуждения – **1-2 балла**.
- Только ответы по всем пунктам – **0 баллов**.

4. На клетчатой бумаге нарисован квадрат со стороной 5 клеток. Его требуется разбить на 5 частей одинаковой площади, проводя отрезки внутри квадрата только по линиям сетки. Сделайте это так, чтобы сумма длин всех проведенных отрезков была равна 16 клеткам.

Решение. Один из возможных примеров приведен на рисунке.



Критерии проверки.
Верное решение – **7 баллов**.
Квадрат разбит на 5 равновеликих частей, но суммарная длина проведенных отрезков больше 16 – **2 балла**.
Другие случаи – **0 баллов**.

5. Рядовой Петров взял ведро нечищеной картошки и за 1 час её почистил. При этом 25% картошки ушло в очистки. За какое время у него набралось полведра очищенной картошки?

Ответ. За 40 минут.
Решение. Так как четверть картошки ушло в очистки, то Петров получил за 1 час три четверти ведра почищенной картошки. Значит, четверть ведра почищенной картошки Петров получил за 20 минут, а половину ведра – за 40 минут.

Критерии проверки.

- Верное решение – **7 баллов**.
- Верный ход решения, но арифметическая ошибка в конце решения (при этом ответ должен получиться разумным, не 1 час и не 10 минут) – **5 баллов**.
- Верные соображения – до **2 баллов**.
- Только ответ – **1 балл**.

8 класс

1. Подберите такие не равные нулю числа n и m, чтобы равенство $(n\cdot 5^n)^n = m\cdot 5^9$ было верным.

Решение.

Таких пар чисел бесконечно много.

Покажем одно из самых естественных решений. Нам нужно, чтобы $n^n\cdot 5^{n^2} = m\cdot 5^9$. Если $n = 3$, то $5^{n^2} = 5^9$. Теперь вычислим m: $m = 3^3 = 27$. Пара $n = 3$, $m = 27$ является решением.

Покажем, как можно получить другие решения. Возьмем произвольное n. Например, $n = 6$. Тогда в левой части равенства мы получаем: $6^6\cdot 5^{36}$, следовательно, $m = 6^6\cdot 5^{27}$.

Критерии проверки.

- Приведена верная пара чисел n и m и показано, что при таких n и m получается верное равенство (или показано, как найти n и m, или проведена проверка) – **7 баллов**.
- Приведена верная пара чисел n и m без каких-либо пояснений **– 5 баллов.**
- Показано, что n может быть равно 3, но для этого n неверно найдено m **– 2 балла**.
- Приведен только верный ответ **– 1 балл**.
- Приведен верный ответ при неверных рассуждениях – **0 баллов.**

2. В подводном царстве живут осьминоги с семью и восемью ногами. Те, у кого 7 ног, всегда врут, а те, у кого 8 ног, всегда говорят правду. Однажды между тремя осьминогами состоялся такой разговор.

Зеленый осьминог: «У нас вместе 24 ноги».
Синий осьминог: «Ты прав!»
Красный осьминог: «Глупости, Зелёный говорит ерунду!»

Сколько ног было у каждого осьминога? (Ответ обоснуйте.)

Ответ. У Зеленого осьминога 7 ног, у Синего осьминога 7 ног, у Красного осьминога 8 ног.

Решение. Из условия задачи следует, что количество ног и правдивость высказываний связаны однозначно. Синий и Красный осьминоги про слова Зеленого осьминога произнесли противоречащие друг другу фразы. Значит, кто-то из них сказал правду, а кто-то ложь. А это, в свою очередь, означает, что у кого-то из них 7 ног. Таким образом, слова Зеленого осьминога – ложь (в противном случае у каждого из трех осьминогов должно быть по 8 ног, иначе общее количество ног меньше 24). Подведем итоги: Зеленый осьминог сказал ложь, у него 7 ног; тогда Синий осьминог сказал ложь, у него 7 ног, а Красный осьминог сказал правду, у него 8 ног.

Критерии проверки.

- Приведен полный верный анализ ситуации задачи и дан верный ответ – **7 баллов**.
- Приведен верный анализ ситуации, но по каким-либо причинам дан неверный ответ (например, перепутана связь между количеством ног и правдивостью высказываний) – **5-6 баллов.**
- Приведен верный ответ и показано, что он удовлетворяет условию задачи (проведена проверка) **– 3 балла**.
- Приведен только верный ответ **– 1 балл**.
- Приведен верный ответ при неверных рассуждениях – **0 баллов.**

3. Фирма изготавливает лимонный напиток, разбавляя лимонный сок водой. Сначала фирма производила напиток, содержащий 15% лимонного сока. Через некоторое время генеральный

директор отдал указание снизить содержание лимонного сока до 10%. На сколько процентов увеличится количество производимого лимонного напитка при тех же объёмах поставок лимонов?

Ответ. На 50%.

Решение. *1 способ.* Содержание лимонного сока в напитке после указания генерального директора снизилось в полтора раза. Значит, из тех же лимонов можно приготовить в полтора раза больше лимонного напитка. Иными словами, количество производимого лимонного напитка увеличится в полтора раза или на 50%.
2 способ. Пусть x – количество производимого напитка до указания генерального директора. Тогда количество лимонного сока в этом напитке – $0{,}15 \cdot x$. Пусть теперь y – количество производимого напитка после указания генерального директора. Тогда количество лимонного сока в этом напитке – $0{,}1 \cdot y$. Так как подразумевается, что количество лимонного сока не изменилось, получаем равенство $0{,}15 \cdot x = 0{,}1 \cdot y$. Умножив обе части этого равенства на 10, получим: $y = 1{,}5 \cdot x$; или: $y = x + 0{,}5 \cdot x$. Значит, количество производимого напитка увеличилось на 50%.

Критерии проверки.

- Полное решение – **7 баллов.**
- Верно составлено уравнение по условию задачи, но дальнейшие рассуждения отсутствуют или ошибочны – **2 балла.**
- Верный ответ получен с помощью введения конкретного количества (например, 100 литров) производимого напитка или лимонного сока – **1 балл.**
- Приведен только верный ответ или верный ответ, сопровожденный неверными рассуждениями – **0 баллов.**

4. Все натуральные числа, сумма цифр в записи которых делится на 5, выписывают в порядке возрастания: 5, 14, 19, 23, 28, 32, … Чему равна самая маленькая положительная разность между соседними числами в этом ряду? Приведите пример и объясните, почему меньше быть не может.

Ответ. Наименьшая разность равна 1, например, между числами 49999 и 50000.

Решение. Разность меньше 1 быть не может, так речь идет про разность различных натуральных чисел.
Комментарий. Как догадаться до решения.

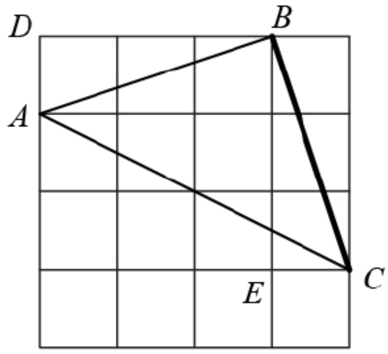
Понятно, что если два соседних числа отличаются только в разряде единиц, то разность между ними равна 5 (например, 523 и 528). Значит, нужно, чтобы числа отличались и в других разрядах. Можно попробовать взять б**о**льшее число круглым, тогда числа будут отличаться минимум в двух разрядах. Возьмем, например, 50, предыдущее число 46, а разность равна 4. Если взять 500, то предыдущее число 497 и разность равна 3. Осталось подобрать такое число нулей, чтобы разность была равна 1.

Критерии проверки.

- Приведен пример требуемых чисел с разностью 1 – **7 баллов**.
- Приведены рассуждения, позволяющие сконструировать последовательные числа ряда с минимальной разностью, и сконструированы числа, разность между которыми 2, но не сконструированы числа, дающие разность 1 – **4 балла**.
- Приведены примеры, показывающие, что разность может быть меньше 4, но без обоснования минимальности – **2 балла**.
- Остальные случаи – **0 баллов.**

5. На стандартном тетрадном листе в клетку нарисован угол (см. рисунок). Найдите его величину, не используя измерительные инструменты. Ответ обоснуйте.

Ответ. 45°.



Решение. Соединим две «крайние» точки отрезком (как на рисунке). Получившийся треугольник – равнобедренный, так как две его стороны AB и BC являются диагоналями трёхклеточных прямоугольников. Диагональ AB делит угол прямоугольника с вершиной B на два угла, дополняющих друг друга до прямого. Треугольники ADB и CEB равны по двум катетам, значит, равны их соответствующие углы. И значит, угол CBE дополняет угол ABE до прямого. Таким образом, треугольник ABC – равнобедренный и прямоугольный. Его углы A и C при основании AC равны по свойству равнобедренного треугольника и имеют величину 45° по теореме о сумме углов треугольника.

Комментарий. Если соединить точку B с серединой AC, мы также получим равнобедренный прямоугольный треугольник. Рассуждения аналогичны.

Критерии проверки.

- Приведено верное обоснованное решение – **7 баллов.**
- Приведены в целом верные рассуждения, в которых допущены ошибки, не имеющие для сути решения принципиального характера, и дан верный ответ – **5 баллов.**
- Сделаны дополнительные построения и обозначения на чертеже, из которых ясен ход решения, дан верный ответ, но не приведены сами рассуждения – **3 балла.**
- Приведен верный ответ без обоснования либо с неверным обоснованием – **0 баллов.**

1. (7 баллов) В равенстве $1 - 2 - 4 - 8 - 16 = 19$ поставьте несколько знаков модуля так, чтобы оно стало верным.

Ответ. $||1-2|-|4-8|-16|=19$.

Существуют и другие примеры.
Комментарий. Достаточно привести один пример. Пояснять, как он получен, не требуется.
Критерии проверки.

- Любой верный пример — 7 баллов.

2. (7 баллов) Чебурашка и Гена съели торт. Чебурашка ел вдвое медленнее Гены, но начал есть на минуту раньше. В итоге им досталось торта поровну. За какое время Чебурашка съел бы торт в одиночку?

Ответ. За 4 минуты.
Решение.
Первый способ. Если Чебурашка ест вдвое медленнее Гены, то, чтобы съесть столько же торта, сколько съел Гена, ему нужно в два раза больше времени. Значит, то время, которое Чебурашка ел в одиночку (1 минута), составляет половину всего времени, за которое Чебурашка съел половину торта. Таким образом половину торта он съел за 2 минуты, а весь торт съел бы за 4 минуты.
Второй способ. Пусть Гена съедает весь торт за x минут, тогда Чебурашке на весь торт нужно $2x$ минут. Каждому из них досталась половина торта, то есть Гена ел $0{,}5x$ минут, а Чебурашка x минут. Из условия следует, что $0{,}5x + 1 = x$, откуда $x = 2$. Значит, Чебурашка съест торт за $2 \cdot 2 = 4$ минуты.
Критерии проверки.

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Верно составлено и решено уравнение или проведены верные рассуждения, но дан ответ не на тот вопрос — 6 баллов.
- Решение, в котором рассмотрена конкретная масса торта, — 2 балла.
- Уравнение составлено верно, но решено неверно — 2 балла.
- Приведён верный ответ, и проверено, что он удовлетворяет условию задачи, — 1 балл.
- Приведён только ответ — 0 баллов.

3. (7 баллов) Дима начертил графики четырёх линейных функций на координатной плоскости, но забыл отметить единичные отрезки. Когда он переписывал задание в тетрадь, то отвлекся и не дописал уравнения, задающие функции под номерами 3 и 4. Найдите эти уравнения. Ответ обоснуйте.

Ответ. 3) $y = -3x + 12$; 4) $y = -x - 12$.

Решение. Из четырёх прямых только прямая a имеет положительный угловой коэффициент, следовательно, она задаётся уравнением 2 и пересекает оси координат в точках (0; 12) и (–12; 0).

Так как уравнение 1 Дима записал полностью, его графиком является прямая, проходящая через начало координат, то есть прямая c.

У прямой b модуль углового коэффициента больше, чем у прямой c, значит, начало уравнения прямой b Дима записал под номером 3. Так как эта прямая проходит через точку (0;12), она задаётся уравнением $y = -3x + 12$.

Прямая d проходит через точку (–12;0) и через точку (12; –24) – точку пересечения прямых b и c, координаты которой легко находятся как решение системы линейных уравнений: $y = -3x + 12$ и $y = -2x$.

Найдём уравнение прямой d. Для этого рассмотрим систему двух уравнений: $0 = -12k_4 + b_4$; $-24 = 12k_4 + b_4$. Сложив эти уравнения, получим $b_4 = -12$. Подставив в первое уравнение, получим $k_4 = -1$.

Критерии проверки.

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- В целом верное решение, в котором допущены арифметические ошибки, — 4 балла.
- Обоснованно найдены уравнения трёх прямых — 3 балла.
- Если в решении указано, какие из изображённых прямых задаются уравнениями 1 и 2, но более не найдено ничего — 1 балл.
- Приведён только верный ответ — 1 балл.

4. (7 баллов) Три школьника сделали по два утверждения про натуральные числа a, b, c:

Антон:	1) $a + b + c = 34$;	2) $abc = 56$;
Борис:	1) $ab + bc + ac = 311$	2) наименьшее из чисел равно 5;
Настя:	1) $a = b = c$	2) числа a, b и c — простые.

У каждого школьника одно утверждение верное, а другое — нет. Найдите числа a, b, c.

Ответ. 2, 13, 19 (в любом порядке).

Решение. Если из утверждений Антона верно второе утверждение, то оба утверждения Насти неверны. Значит, $a + b + c = 34$. Таким образом, верно второе Настино утверждение. Так как сумма трёх простых чисел равна 34, они не могут все быть нечётными, и одно из них равно 2. Значит, из утверждений Бориса верно первое утверждение.

Пусть для определённости $a = 2$. Тогда $b + c = 32$.

Далее можно перебрать все пары простых чисел, дающие в сумме 32, и проверить для них равенство $ab + bc + ac = 311$.

Но можно поступить так:

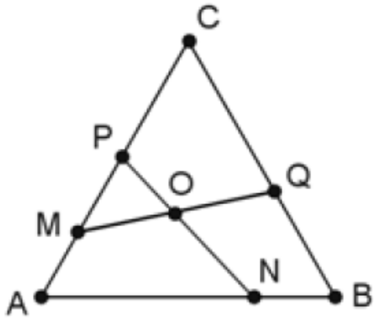
$$311 = ab + bc + ac = a(b + c) + bc = 64 + bc, \text{ откуда } bc = 247.$$

Так как $247 = 19 \cdot 13$, получаем что $b = 13$, $c = 19$ (или наоборот).

Критерии проверки.

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Проведено верное рассуждение о том, какие утверждения верны, а какие нет, но сами числа не найдены или найдены неверно — 3 балла.
- Приведён верный ответ с проверкой того, что он удовлетворяет всем условиям задачи, но без доказательства того, что других решений нет, — 2 балла.
- Обоснованно указаны 2 верных утверждения из трёх — 1 балл.
- Приведён только ответ — 0 баллов.

5. В равностороннем треугольнике ABC со стороной a точки M, N, P, Q расположены так, как показано на рисунке. Известно, что $MA + AN = PC + CQ = a$. Найдите величину угла NOQ.



Ответ. 60°

Решение. По условию задачи $AN = a - AM$, следовательно, $AN = MC$. Аналогично $AP = QC$. Из этих равенств и равенства $\angle A = \angle C = 60°$ следует, что $\Delta ANP = \Delta CMQ$. Отсюда $\angle ANP = \angle QMC$, $\angle APN = \angle MQC$. По теореме о сумме углов треугольника $\angle ANP + \angle APN = 120°$, поэтому $\angle OMP + \angle OPM = 120°$, а значит, $\angle MOP = 60°$. Углы MOP и NOQ вертикальные, поэтому $\angle NOQ = 60°$.

Критерии проверки.

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Доказано, что треугольники ANP и QCM равны, но дальнейших продвижений нет или они неверны — 2 балла.
- Приведён только ответ — 0 баллов.

1. (7 баллов) Точка O — центр квадрата $ABCD$. Найдите какие-нибудь семь попарно неравных векторов с концами и началами в точках A, B, C, D, O, сумма которых равна нулевому вектору. Объясните свой ответ.

Решение. Например, подойдёт цепочка $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DO}=\vec{0}$.

Критерии проверки.

- Приведён верный набор из семи векторов, либо доказано, что его сумма равна нулевому вектору, либо очевидно (исходя из обозначений векторов), что сумма равна нулевому вектору (например, так, как указано в ответе) — 7 баллов.
- Приведён верный набор из семи векторов, про который не доказано, что его сумма равна нулевому вектору, — 5 баллов.
- Приведён набор из шести векторов, удовлетворяющий остальным условиям задачи, — 2 балла.
- Приведён набор из семи векторов, но среди них есть одна пара равных векторов — 1 балл.
- Приведён набор векторов, сумма которых не равна нулевому вектору, — 0 баллов.

2. (7 баллов) Можно ли все натуральные числа от 1 до 800 разбить на пары так, чтобы сумма любой пары чисел делилась на 6?

Ответ. Нет.

Решение. Если требуемое в задаче возможно, то числа, кратные шести, должны разбиться на пары. Так как $800 = 133 \cdot 6 + 2$, чисел от 1 до 800, кратных шести, ровно 133. Противоречие: 133 числа нельзя разбить на пары.

Замечание. Среди чисел от 1 до 800 остаток 0 при делении на 6 дают 133 числа, остаток 1 — 134 числа, остаток 2 — 134 числа, остаток 3 — 133 числа, остаток 4 — 133 числа, остаток 5 — 133 числа. Следовательно, противоречие также можно получить иначе. Например, число, дающее остаток 1, должно быть в паре с числом, дающим остаток 5. Значит, таких чисел должно быть поровну, что не так.

Критерии проверки.

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Верно подсчитано количество чисел с теми остатками, на которых основано получение противоречия, но ошибочно указано количество чисел с какими-то другими остатками — 5 баллов.
- Утверждается, что «не сойдутся остатки чисел», но не приводятся конкретные противоречия. Например, говорится, что чисел, кратных 6, нечётное количество, но не объясняется почему — 2 балла.
- Приведён только ответ — 0 баллов.

3. (7 баллов) Участвуя в шахматном турнире, Вася сыграл 52 партии. По старой системе подсчёта очков (1 очко за победу, $\frac{1}{2}$ очка за ничью и 0 очков за поражение) он набрал 35 очков. Сколько очков он набрал по новой системе подсчёта очков (1 очко за победу, 0 очков за ничью и –1 очко за поражение)?

Ответ. 18 очков.

Решение.

Первый способ. Пусть Вася в турнире a раз победил, b раз сыграл вничью и c раз проиграл. Тогда $a + b + c = 52$, $a + \frac{b}{2} = 35$. Нужно найти значение $a - c$. Из второго соотношения следует, что $b = 70 - 2a$. Тогда $a + (70 - 2a) + c = 52$, откуда $70 + c - a = 52$, $a - c = 18$.

Второй способ. При системе подсчёта $(1; \frac{1}{2}; 0)$ Вася набрал 35 очков, значит, при системе (2; 1; 0) он наберёт вдвое больше, то есть 70 очков.

При системе (1; 0; –1) Вася теряет по одному очку в каждой партии (по сравнению с системой (2; 1; 0)). Значит, он наберёт 70 – 52 = 18 очков.

Критерии проверки.

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Верное рассуждение, в котором верный ответ не получен из-за арифметической ошибки, — 5 баллов.
- Рассмотрен частный случай, то есть конкретные значения числа побед, ничьих и поражений, удовлетворяющие условию задачи, и получен верный ответ — 2 балла.
- Приведён только ответ — 0 баллов.

4. (7 баллов) На координатной плоскости изображены графики функций $y = x^2 + bx + c$ и $y = x^2 + cx + b$.

Найдите значения b и c. В ответе запишите уравнения каждой из функций.

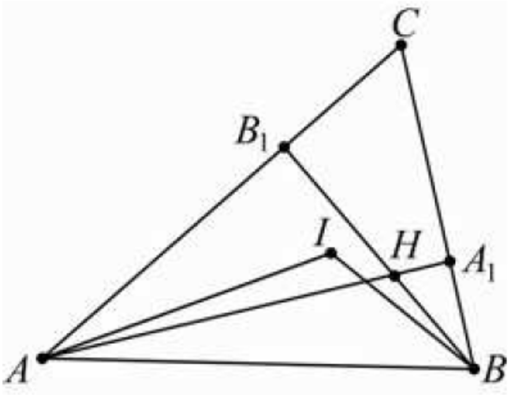
Ответ. $y = x^2 + 2x - 3$ и $y = x^2 - 3x + 2$.

Решение. Некоторое число t является корнем обоих трёхчленов, поэтому $t^2 + bt + c = t^2 + ct + b$, откуда $(b - c)(t - 1) = 0$. Так как $b \neq c$ (иначе параболы совпадут), получаем, что $t = 1$. Если парабола $y = x^2 + bx + c$ пересекает ось абсцисс в точках –3 и 1, то по теореме, обратной теореме Виета $b = -(-3 + 1) = 2$, $c = -3 \cdot 1 = -3$.

Критерии проверки.

- Полное верное решение — 7 баллов.
- Приведён верный ответ, и показано, что он подходит (в частности, указана координата общей точки пересечения парабол с осью абсцисс), — 3 балла.
- Верно найден общий корень, но при нахождении коэффициентов получены неверные значения из-за арифметической ошибки — 2 балла.
- Приведён только верный ответ — 1 балл.

5. (7 баллов) Две вершины, центр вписанной окружности и точка пересечения высот остроугольного треугольника лежат на одной окружности. Найдите угол при третьей вершине.



Ответ. $60°$.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC, в котором проведены высоты AA_1 и BB_1. Пусть точка H — точка пересечения высот, точка I — центр вписанной окружности.

1. Сумма углов четырёхугольника A_1HB_1C равна $360°$. Получаем

$$\angle AHB = \angle A_1HB_1 = 360° - 90° - 90° - \angle C = 180° - \angle C.$$

2. По теореме о сумме углов треугольника имеем соотношения $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ (для треугольника ABC) и $\dfrac{\angle A}{2} + \dfrac{\angle B}{2} + \angle AIB = 180°$ (для треугольника ABI). Отсюда

$$\angle AIB = 180° - \frac{\angle A + \angle B}{2} = 180° - (180° - \angle C) : 2 \Rightarrow \angle AIB = 90° + \frac{\angle C}{2}.$$

3. Точки A, B, H и I лежат на одной окружности. Так как треугольник ABC остроугольный, точки H и I лежат по одну сторону от хорды AB, то есть вписанные углы AIB и AHB опираются на одну и ту же дугу. Значит,

$$\angle AIB = \angle AHB, \text{ откуда } 90° + \frac{\angle C}{2} = 180° - \angle C, \text{ а значит } \angle C = 60°.$$

Критерии проверки.

- Полное верное решение — 7 баллов.

Замечание. Если ученик ссылается на результаты пунктов 1 и 2 решения как на общеизвестные, то баллы не снижать.

- В целом верный ход решения, но упущено обоснование того, что углы AIB и AHB опираются на одну и ту же дугу (не использовано то, что треугольник остроугольный), — 5 баллов.
- В целом верный ход решения, но при решении уравнения $90° + \dfrac{\angle C}{2} = 180° - \angle C$ допущена ошибка и получен неверный ответ — 5 баллов.
- Приведены пункты 1 и 2 решения, но дальнейшего продвижения нет или оно ошибочно — 2 балла.
- Приведён только пункт 1 или только пункт 2 решения, но дальнейшего продвижения нет или оно ошибочно — 1 балла.
- Приведён только ответ — 0 баллов.

1. За лето однокомнатная квартира подорожала на 21 %, двухкомнатная — на 11 %, а суммарная стоимость квартир — на 15 %. Во сколько раз однокомнатная квартира дешевле двухкомнатной?

Ответ. В полтора раза.

Решение. Пусть однокомнатная квартира стоила a рублей, двухкомнатная — b рублей. Тогда из условия задачи следует, что $1{,}21a + 1{,}11b = 1{,}15(a + b)$, откуда $1{,}5a = b$.

Критерии проверки.

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Получено нужное уравнение с двумя переменными, а далее из уравнения сделаны неверные выводы или не сделано никаких выводов, — 3 балла.
- Решение, в котором рассмотрены конкретные цены квартир, — 2 балла.
- Только верный ответ — 0 баллов.

2. Найдите какую-нибудь пару натуральных чисел a и b, бóльших 1, удовлетворяющих уравнению $a^{13} \cdot b^{31} = 6^{2015}$.

Решение. Достаточно привести один пример. Так как $2015 = 13 \cdot 155 = 31 \cdot 65$, подходят $a = 2^{155}$, $b = 3^{65}$. Действительно,

$$(2^{155})^{13} \cdot (3^{65})^{31} = 2^{2015} \cdot 3^{2015} = 6^{2015}.$$

Комментарий. Кроме ещё одного очевидного варианта $a = 3^{155}$, $b = 2^{65}$, могут быть и другие. Например, можно действовать так:

$$2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31 = 2 \cdot 13 \cdot 31 + 3 \cdot 13 \cdot 31 = 62 \cdot 13 + 39 \cdot 31,$$

$$(6^{62})^{13} \cdot (6^{39})^{31} = 6^{2015}, \quad a = 6^{62},\ b = 6^{39}.$$

Аналогично можно получить числа $a = 18^{62} = 2^{62} \cdot 3^{124}$, $b = 24^{13} = 2^{39} \cdot 3^{13}$.

Критерии проверки.

- Приведена хотя бы одна пара значений a, b и показано, что она удовлетворяет данному условию — 7 баллов.
- Приведена пара чисел, более ничего не обосновано (а жюри умеет показывать, что пара подходит) — 5 баллов.
- Основная идея решения верна, но допущена арифметическая ошибка (например, написано, что $2015 = 13 \cdot 165$) — 2 балла.

3. Может ли сумма 2015 последовательных натуральных чисел оканчиваться той же цифрой, что и сумма следующих 2019 чисел?

Ответ. Не может.

Способ 1 (поиск чисел). Пусть сумма чисел от a до $a + 2014$ оканчивается той же цифрой, что и сумма чисел от $a + 2015$ до $a + 4033$. Тогда кратна 10 разность между этими суммами, равная

$$\frac{2015\cdot(a+a+2014)}{2}-\frac{2019\cdot(a+2015+a+4033)}{2}=$$
$$=2015\cdot(a+1007)-2019\cdot(a+3024)=-4a+2015\cdot1007-2019\cdot3024.$$

При любом значении a разность нечётна, т. е. не может делиться на 10. Противоречие.

Способ 2 (сразу чётность). Среди $2015 + 2019 = 4034$ подряд идущих натуральных чисел 2017 нечётных чисел, то есть их количество нечётно. В одну сумму попадает чётное число нечётных чисел, а в другую — нечётное. Значит, указанные суммы будут разной чётности, т. е. не могут оканчиваться на одну цифру.

Комментарий. Обратите внимание: может оказаться, что первая сумма чётная, а вторая — нечётная, а может быть и наоборот.

Критерии проверки.

- Любое верное решение — 7 баллов.
- Высказаны верные мысли о разной чётности сумм, но они недостаточно обоснованы или выводы не сделаны — до 3 баллов.
- Только ответ — 0 баллов.

4. Учительница Мария Ивановна готовит задания для урока математики. Она хочет в уравнении $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{c}$ вместо a, b и c поставить три различных натуральных числа, чтобы корни уравнения были целыми числами. Помогите ей: подберите такие числа и решите уравнение.

Решение. Таких уравнений много, достаточно привести одно из них. Например, корнями уравнения

$$\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+3}=\frac{1}{2}$$

являются числа 0 и –5.

Комментарий. Уравнение, приведённое в решении, можно подобрать. Рассмотрим равенство

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$$

Можно сразу взять $c = 2$ и сделать так, чтобы один из корней был равен 0. Получаем данное выше уравнение. Остаётся проверить, что у него второй корень также является целым числом.

Из рассуждений, приведённых ниже, следует, что второй корень обязательно будет целым. Действительно, решение данного уравнения сводится к решению

приведённого квадратного уравнения с целыми коэффициентами. Из теоремы Виета следует, что если один его корень целый, то и другой тоже целый.
Как провести целенаправленный поиск таких чисел a, b и c? Данное уравнение приводится к квадратному уравнению

$$x^2+(a+b-2c)\cdot x+(ab-ac-bc)=0.$$

Его дискриминант равен $(a-b)^2+4c^2$. Нужно подобрать такие числа, чтобы дискриминант был равен квадрату целого числа. Это можно сделать, вспомнив «пифагоровы» тройки, например $3^2 + 4^2 = 5^2$ или $5^2 + 12^2 = 13^2$.
В первом случае можно взять $c = 2$, $a - b = 3$. Тогда

$$x_{1,2}=\frac{2c-a-b\pm 5}{2}=\frac{4-a-b\pm 5}{2}.$$

При $a=6$, $b=3$ имеем $x_1 = 0$, $x_2 = -5$. Так получаем уравнение, приведённое выше:

$$\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+3}=\frac{1}{2}.$$

Во втором случае аналогично возьмём $c = 6$, $a = 7$, $b = 2$. Получаем уравнение

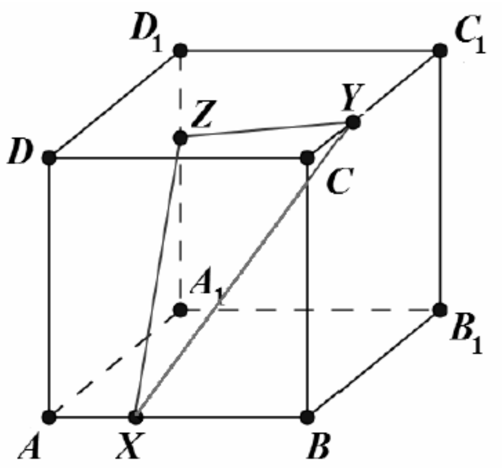
$$\frac{1}{x+7}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{6},$$

корни которого — числа -5 и 8.

Критерии проверки.

- Полное решение — уравнение с конкретными значениями a, b и c, которое решено и найдены его корни, — 7 баллов.
- В решении приведено подходящее уравнение без решения (или решённое неверно), жюри проверило, что оно подходит, — 3 балла.

5. Петя на ребре AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отметил точку X, делящую ребро AB в отношении $1:2$, считая от вершины A. Приведите пример, как Петя может отметить на рёбрах CC_1 и A_1D_1 соответственно точки Y и Z, чтобы треугольник XYZ был равносторонним. Пример обоснуйте.



Решение. Отметим точки Y и Z так, что $A_1Z:ZD_1 = 2:1$, $C_1Y:YC = 2:1$. Равенство сторон треугольника XYZ следует, например, из равенства ломаных XAA_1Z, ZD_1C_1Y и $YCBX$.
Пусть a — длина ребра данного куба. Тогда звенья ломаных равны

$$XA=ZD_1=YC=\frac{a}{3},$$

$$AA_1=D_1C_1=CB=a,$$

$$A_1Z=C_1Y=BX=\frac{2a}{3}.$$

Из равенства треугольников

$$\Delta XBC = \Delta YC_1D_1 = \Delta ZA_1A$$

(прямоугольные треугольники с равными катетами) следует, что $XC = YD_1 = ZA$. Ребро CC_1 перпендикулярно грани $ABCD$, значит, $\Delta XCY = 90°$, т.е., треугольник XCY прямоугольный. Аналогично прямоугольными являются треугольники YD_1Z, ZAX. Из равенства треугольников $\Delta XCY = \Delta YD_1Z = \Delta ZAX$ (прямоугольные треугольники с равными катетами) следует, что $XY = YZ = ZX$, что и требовалось доказать.

Замечание. 1. Стороны треугольника XYZ — диагонали равных прямоугольных параллелепипедов с ребрами a, $\frac{a}{3}$ и $\frac{2a}{3}$, где a — длина ребра данного куба. Их длины можно вычислить, используя пространственную теорему Пифагора.

2. Нетрудно доказать, что точки X, Y и Z переходят друг в друга при повороте куба на 120° вокруг диагонали B_1D.

Критерии проверки.

- Любое полное верное решение (приведён верный пример расположения точек, и доказано, что условие задачи выполнено) — 7 баллов.
- В целом верное решение, содержащее пробелы в обосновании, — 5−6 баллов. В частности, если не доказано, как из равенства ломаных следует равенство сторон треугольника, то ставится 5 баллов.
- Верно указаны точки, но не доказано, что полученный треугольник равносторонний, — 3 баллами.
- Некоторые разумные идеи, не приведшие к верному решению, — 1−2 балла.
- Только верный ответ — 0 баллов.